第 4 講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1　剰余の定理

要点 ①　剰余の定理

x についての多項式を $P(x)$，$Q(x)$ などと書く。また，多項式 $P(x)$ の x に，ある数 k を代入したときの値を $P(k)$ と書く。

例　$P(x)=x^2+3x-4$ のとき，$P(2)=2^2+3\cdot2-4=6$

$P(x)=x^2+3x-4$ について，$P(x)$ を $x-2$ で割ると，

$$\begin{array}{r} x\ \ +5 \\ x-2\,\overline{)\,x^2+3x-\ \ 4} \\ \underline{x^2-2x\qquad} \\ 5x-\ \ 4 \\ \underline{5x-10} \\ 6 \end{array}$$

商は $x+5$，余りは 6 である。このことから，除法の原理により

$P(x)=$

と表される。この等式の両辺に $x=$ 　を代入すると

$P(\ \ )=\ \ \cdot7+6=6$

となり，この値は，$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余り 6 に等しい。

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを R とすると, R は　　であり，除法の原理により

$P(x)=$

と表される。この等式の両辺に $x=$ 　を代入すると

$P(\ \ )=\ \ \cdot Q(\ \ )+R=R$

となり，この値は，$P(x)$ を $x-k$ で割ったときの余り R に等しい。

よって，以下の定理が成り立つ。

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは $P(k)$ である。

この剰余の定理を用いると，多項式を 1 次式で割ったときの余りを，実際に割り算をすることなく求めることができる。

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$

と表される。ここで，$ax+b=0$ となる x は $x=-\dfrac{b}{a}$ であるから，多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ である。

[MEMO]

1　多項式 $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ を次の１次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$x-1$　　(2)　$x+3$　　(3)　$2x-1$

Point Pickup

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を１次式 $x-k$ で割ったときの余りは $P(k)$

この定理を用いて，多項式を１次式で割ったときの余りを求めることができる。

また，多項式 $P(x)$ を１次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

第 4 講　PART1 確認問題

多項式 $P(x)=x^3+2x^2-3x+1$ を次の 1 次式で割ったときの余りを求めよ。

1 $x-1$

余り [ア]

2 $x+2$

余り [イ]

3 $2x-1$

余り $\dfrac{[ウ]}{[エ]}$

第 4 講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1　剰余の定理

1　多項式 $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ を次の 1 次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$x-1$　　(2)　$x+3$　　(3)　$2x-1$

[解答]

(1)　$P(1)=1^3+3\cdot1^2-2\cdot1+4=6$

(2)　$P(-3)=(-3)^3+3\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)+4=10$

(3)　$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+4=\frac{31}{8}$

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3+2\cdot1^2-3\cdot1+1 \quad \text{[A]} \\ &= 1+2-3+1 \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

[A]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは　$P(k)$

2

[正解] イ：7

[解説]

$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned} &P(-2) \\ &= (-2)^3+2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1 \quad \text{[B]} \\ &= -8+8+6+1 \\ &= \mathbf{7} \end{aligned}$$

[B]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは　$P(k)$

3

[正解] ウ：1，エ：8

[解説]

$P(x)$ を $2x-1$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+1 \quad \text{[C]} \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1 \\ &= \mathbf{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

[C]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは　$P\left(-\frac{b}{a}\right)$